自然法則を用いて算出した音律の創造の試み

長田 将弥[†1]　横山 真男[†1]

本研究では、自然法則である黄金比の近似比やネイピア数といった数字を用いて、新しい音律を作りどのような音楽が得られるのかを研究の目的とする。最古の音律と言われるピタゴラス音律の音階の導出方法を参考にし、基音の周波数に自然数や黄金比を乗じることで音階を導出した。自然数や黄金比それぞれの音律の特徴を考察し、また、得られた音律を用いて既存の楽曲に当てはめアンケート調査による評価を行った。

Creation of a new temperament computed using natural laws

MASAYA OSADA[†1]　MASAO YOKOYAMA[†1]

The objective of this study is to obtain new temperaments and scales, using Golden Ratio or Napier's Constant and to apply to a contemporary music. The temperaments in this paper are based on the oldest method of Pythagorean Tuning, which the scales are generated by multiplying Golden Ratio or Napier's Constant to fundamental tone recursively. The characteristic of these scales and the validation by questionnaires are discussed in the present paper.

1. はじめに

音律はすでにいくつか種類が存在し、音律の誕生は数学者ピタゴラスによるピタゴラス音律が起源であると言われている。音律とは、1 オクターブ内に音を音高順に並べたものをいう。音律にはいくつか種類が存在している。音律という言葉が誕生したきっかけとなった一番初めの「ピタゴラス音律」､ピタゴラス音律では不協和音が目立ち始めた時代に提案された「純正音律」、純正音律での転調問題を解決するために提案された「中全音律」、そして現在日本のポップカルチャーや、西洋音楽で最も使われており、我々が良く耳にする音律の「平均律」などが存在している。それぞれ特徴があり、時代とともに変化をしてきた。

ピタゴラス音律はドとミの音の響きが悪く、それを改善したものが平均律である。平均律は現在の西洋音楽でもっとも使われている音律であり、我々が聞くポップスやロックなども平均律で作曲が行われている事が大半である。当たり前のように、また平均律を使わなければいけないかのように現代の音楽は平均律に染まっている。音律は協和が重要視されてきたが、音楽も芸術であり、現代ではそのようなルールというものは存在していない。本研究は新たな音律を作ることで現代作曲家への貢献を意図している。

2. ピタゴラス音律の導出方法

ピタゴラス音律は、一番初めに誕生した音律[1]と言われている。その名の通りピタゴラスが発明したと言われ、歴史はギリシャ時代(580BC～500BC ごろ)で、当時ピタゴラスはこの音律を音楽としてではなく、数学あるいは物理学として研究していた。

ピタゴラスは次の実験を行った。二つの 1 弦琴を並べ、一つを開放弦、もう一つを全体の弦長の 1/3 の位置に琴柱を挟む。そして同時に二つを弾くとお互いの音が心地よく響く事を発見した。この時、分割した左でも右でも開放弦と響きあう(図 1 の A、B)。ピタゴラスは周波数比が 2 : 1(オクターブまたは 2 倍音)と周波数比 3 : 2 を組み合わせて音律を作った。ピタゴラスは最初の音（根音）の周波数を 3 倍し、2 で割り、第 2 の音を作った。2 で割ったのは根音からオクターブの間に第 2 の音を配置する為である。オクターブは同じ音として捉えることができるため、2 で割ったとしても同じ音である。そして次に第 3 音を作るために、根音に 3 倍した音は良く響く事が確認できているので、第 2 の音を 3 倍し、第 1 音からオクターブの 2 倍以内に周波数を収めるため、2 で 2 回割った音を第 3 音とした。これを繰り返すとオクターブとほぼ同じ周波数の音にめぐり合う。オクターブが高い音をまた探しても同じ音の繰り返しになるため、打ち切った。そしてその有限数の音律が 12 音階できた。現在のピアノの鍵盤の 1 オクターブの数と同じである。図 2 はピタゴラス音律 C を基音とした場合に 3 : 2 の周波数比で得た音と周波数を示した。

†1 明星大学
Meisei University.

ⓒ2012 Information Processing Society of Japan

読み	ド		ソ		レ		ラ	
周波数	260.7	ド×$\frac{3}{2}$=	391.05	ソ×$\frac{3}{2}{}^{2}$=	293.288	レ×$\frac{3}{2}$=	439.931	ラ×$\frac{3}{2}{}^{2}$=

ミ		シ		ファ#		ド#	
329.948	ミ×$\frac{3}{2}$=	494.923	シ×$\frac{3}{2}{}^{2}$=	371.192	ファ#×$\frac{3}{2}$=	556.788	ド#×$\frac{3}{2}{}^{2}$=

ソ#		レ#		ラ#		ミ#
417.591	ソ#×$\frac{3}{2}$=	626.386	#×$\frac{3}{2}{}^{2}$=	469.79	ラ#×$\frac{3}{2}$=	704.685

図 1 ピタゴラス音律 : 周波数比 3 : 2 で得た音とその周波数

3. 黄金比と自然対数による音律

以下、本研究で用いた黄金比と自然対数について簡単に触れる。

黄金比は自然界と密接な関係があり、人間が無意識に美しいと感じる比であると言われている。黄金比を数学の話題として意識したのはユーグリッドとされている。彼は次のような幾何学の問題として捉えていた。ユークリッドによって提起された問題は、

「線分を二つに分け、小さい方の線分と全体とでできる長方形の面積と、大きい方の線分でできる正方形の面積が等しくなるように分けよ」

である。図 4 のように線分 AB を a:b に分割すると、

$$a^2 = b(a+b) \tag{1}$$

という関係を満たせば良いので、上式をb^2で割って整理すると、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \tag{2}$$

となる。この 2 次方程式を解いて、

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

である。つまり線分 AB を $(1+\sqrt{5})/2:1$ の比に分割すればよく、値は a/b = 1.6180339…である。

一方、ネイピア数または自然対数は e = 2.71828182845904… となり、式(4)で定義されている。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284\ldots \tag{4}$$

これらの数値を使って次章で示す法則性で音律の生成を行う。

4. 音律の作成

4.1 黄金比とネイピア数によるパターンの作成

基音の周波数から黄金比の近似値=1.618 倍し、できた周波数を 2 つ目の音とする。ただし、1.618 倍した結果が基音の 2 倍以上の値になった場合、x＝2、3、5 で割る。割る理由として、基音から 2 倍の周波数の音はオクターブが高いだけで音程としては同じである。なので 1 オクターブ以内に音を収める為に x で割る。そして x に入る値だが、素数の 2、3、5 をそれぞれ代入する。2 で割った場合、3 で割った場合、5 で割った場合、と様々なパターンを音階を試みる。7、9・・・以降は聞き取れない音であったりするため実験を行わない。また、基音の周波数はすべて 260.7Hz で固定する。これはピタゴラス音律での「ド」の音の周波数と同じである。一番はじめに作られた音律の一番初めの音ということで、この「ド」の音を採用する。

ここでは、黄金比で導出した音律を「黄金比音律」、ネイピア数で導出した音律を「ネイピア数音律」と名付け、以下の黄金比 3 パターン、ネイピア数 4 パターンの計 7 パターンを用意した。

- 黄金比音律 A パターン：
  基音(260.7Hz)×1.618÷2(基音から 2 倍以上の場合)
- 黄金比音律 B パターン：
  基音(260.7Hz)×1.618÷3(基音から 2 倍以上の場合)
- 黄金比音律 C パターン：
  基音(260.7Hz)×1.618÷5(基音から 2 倍以上の場合)
- ネイピア数音律 A パターン：
  基音(260.7Hz)×2.7182÷2(基音から 2 倍以上の場合)
- ネイピア数音律 B パターン：
  基音(260.7Hz)×2.7182÷3(基音から 2 倍以上の場合)
- ネイピア数音律 C パターン：
  基音(260.7Hz)×2.7182÷5(基音から 2 倍以上の場合)
- ネイピア数音律 D パターン：
  基音(260.7Hz)×2.7182÷5(基音から 2 倍以上の場合)

4.2 自然法則による音律

上記の黄金比とネイピア数を利用してできた音律の表とグラフを掲載する。各図は、縦軸はピッチ Hz、横軸は 4.1 の法則で導出したピッチを順番に番号つけたものであり、その下の周波数の表は赤く塗られている番号を抜き出しまとめたものである。

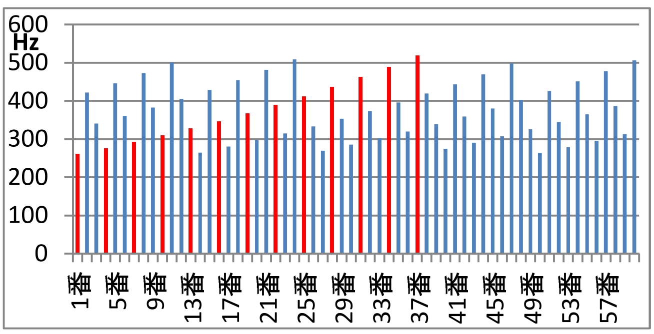

図 2　黄金比パターン A(2 で除算した場合にできた音程)

ⓒ2012 Information Processing Society of Japan

表 1　黄金比音律（A パターンの音律の周波数）

黄金比音律　Aパターン		
1	1番	260.7
2	4番	276.0683323
3	7番	292.3426317
4	10番	309.5763052
5	13番	327.8259083
6	16番	347.1513302
7	19番	367.6159907
8	22番	389.2870481
9	25番	412.2356201
10	28番	436.5370162
11	31番	462.270986
12	34番	489.5219799

図 2 の赤い部分にはある繰り返しの規則性が見られ、徐々に階段状に周波数が上昇するパターンがいくつか存在する。これらのパターンの 1 つを選び、音律を作りそれを表 1 に示した。全てのパターンを抜き出さないのは、どのパターンを取っても周波数がほぼ同じな為である（以下同様）。この音律は周波数がピタゴラス音律や平均律に近く、音律の数も同じであった。

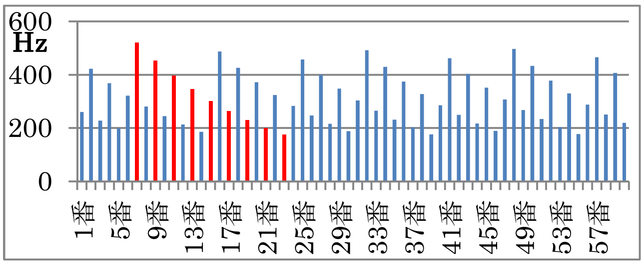

図 3　黄金比パターン B（3 で除算した場合にできた音程）

表２　黄金比音律（B パターンの音律と周波数）

黄金比音律　Bパターン		
1	23番	174.7655645
2	21番	200.2719305
3	19番	229.5008532
4	17番	262.9956254
5	15番	301.3788315
6	13番	345.3639199
7	11番	395.7684637
8	9番	453.529358
9	7番	519.7202341

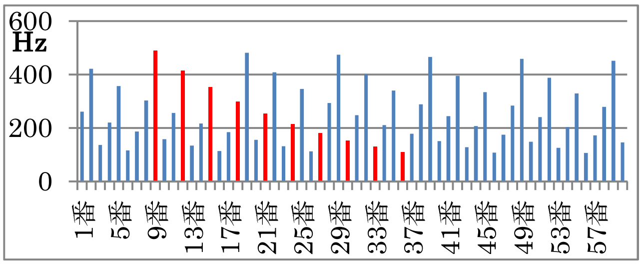

図 4　黄金比パターン C（5 で除算した場合にできた音程）

表 3　黄金比音律 C パターンの音律と周波数

2倍超過を÷2　昇順にする		
1	36番	220.1654077
2	33番	244.9058533
	30番	252.2849541
3	27番	259.8863899
4	24番	297.800761
5	21番	306.7736042
6	18番	351.5282691
7	15番	362.1199413
8	12番	414.9489865
9	9番	427.4515476

図 3 の B パターンは、音が低い順にグループをとると 23 番からだが、23、21、19、17 の周波数は、順に 13、11、9、7 がほぼ 2 倍音であり音程が同等なため音の高い方の 15、13、11、9、7 を音律として採用した。

また図 4、表 3 は C パターンの結果であるが、30 番の音律と 27 番の音律は周波数が近く音が似ているため、低い方の音(27 番)を不採用にした。

次に、ネイピア数のパターン A（基音から 2 倍の周波数値を超えた時に 2 で除算した場合にできた音程）であるが、指数的に増加し音程差が激しく、すぐに可聴領域を超え聞き取れない周波数となるので不採用にした。

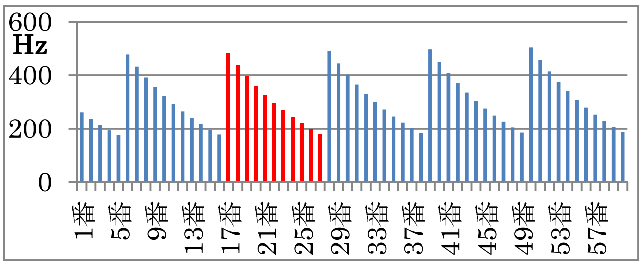

図 5　ネイピア数パターン B（3 で除算した場合の音程）

表 4　ネイピア数音律（B パターンの音律の周波数）

ネイピア数音律　Bパターン		
1	27番	180.5292299
2	26番	199.2449745
3	25番	219.9010093
4	24番	242.6984872
5	23番	267.8594149
6	22番	295.6288149
7	21番	326.2771115
8	20番	360.1027646
9	19番	397.4351754
10	18番	438.637895
11	17番	484.1121643

表 4 に示すように、ネイピア数のパターン B では、20 番、19 番、18 番、17 番は順に 27 番、26 番、25 番、24 番の倍音に当たるため使用しない

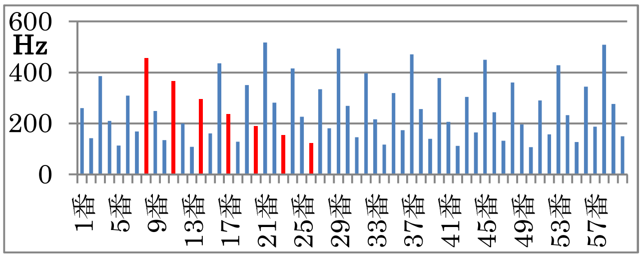

図 6　ネイピア数パターン C（5 で除算した場合の音程）

表 5　ネイピア数音律（C パターンの音律と周波数）

2倍超過を÷2　昇順にする		
1	26番	245.8590283
2	14番	295.1476314
3	23番	306.0426439
4	11番	367.3965608
5	20番	380.9585538
6	8番	457.3312421
7	17番	474.2130635

図 6、表 5 はネイピア数パターン C の結果であるが、全体的に音域が低いため、全体を 2 倍して基音からオクターブ内に収めるようにした。

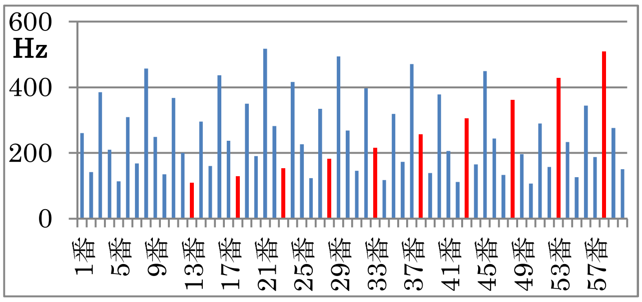

図 7　ネイピア数パターン D（5 で除算した場合の音程）

表 6　ネイピア数音律（D パターンの音律と周波数）

ネイピア数音律　Dパターン		
1	13	108.5820143
2	18	128.9005949
3	23	153.0213219
4	28	181.655678
5	33	215.6482831
6	38	256.001808
7	43	303.9065498
8	48	360.775542
9	53	428.286234
10	58	508.4299706

図 7 および表 6 のパターン D では、倍音が多く存在し、利用できる音律は 4 つとなった。

以上の結果より、音律の数が少な過ぎず、音程を認識できる音律が利用可能性があるので、黄金比音律 A パターン、黄金比音律 C パターン、ネイピア数音律 B パターン、ネイピア数音律 C パターンを採用して、次の章では、実際に既存の楽曲「オーラリー」に当てはめて被験者による評価実験を行った。

5. 評価実験

作成した音律の感応評価として、音律の基音との協和度に関するアンケートと、音律を「オーラリー」に当てはめたソプラノとアルトで構成された楽曲を、黄金比音律、ネイピア数音律を 9 名の方にそれぞれ聴取してその印象に関するアンケートを行った。

実際に使用する音律は、黄金比音律 A パターン、黄金比音律 C パターン、ネイピア数音律 B パターン、ネイピア数音律 C パターンの 4 つであるためそれぞれの協和度と楽曲を被験者に聴かせた。原曲と同じ平均律音程によるものを比較のために用意し計 5 つのパターンとした。

5.1 既存の楽曲に当てはめた時のアンケート評価

今回は平均律によるアメリカの大衆歌謡の楽曲「オーラリー」の 1 コーラス(ソプラノとアルトの二声)に、上述で得た音律を当てはめ、曲の聞こえ具合やハーモニーなどの協和度の特徴を考察した。オーラリーのソプラノとアルトの音階を次の図 8 に示す。「ド¯」は「ド」の 1 オクターブ高い音を示している。

ソプラノ	ソ	ド¯	シ	ド¯	レ¯	ラ	レ
アルト	ド	ミ	レ	ミ	ファ	休符	ファ

ド¯	シ	ラ	シ	ド¯	ソ
ミ	レ	ド	レ	ミ	休符

図 8　オーラリーの音程（ソプラノ、アルト）

この「オーラリー」という楽曲は 12 個の音程によって成り立っている。しかし今回作成した黄金比音律やネイピア数音律は 12 個であるとは限らないため、それぞれ対応する音を決めなくてはならない。そこで、12 個に対して対応するために 12 を音律の数で割ることによって 1 つの音律に平均律が何個分入るかによって決定した。例えば、ネイピア数音律の B パターンの音律の数は 7 つ存在する。12÷7≒1.7 となり、ネイピア数音律 B パターンの音律 1 つに平均律の音が約 1.7 個分当てはまる。1.7 個分とは、「ド」と「ド#7 割分」である。このようにして音律を対応させていった。なお、今回の実験によって誕生した音律の音程の呼び方は、周波数が低い方から 1、2、3、・・・と数字で呼んでいくことにする。

ⓒ2012 Information Processing Society of Japan